
SUR

LA VÉRIFICATION DES PROJETS

DE PLANCHERS EN BÉTON ARMÉ

1. Une note récente¹ de la section technique du génie a indiqué les conditions à spécifier pour les marchés de planchers en béton armé.

Ces marchés donnent lieu généralement à une adjudication avec concours restreint. On exige des concurrents un certain nombre de documents qui précisent les conditions dans lesquelles ils se proposent d'établir leur ouvrage. On élimine les projets qui paraissent défectueux et l'on choisit parmi ceux qui restent celui dont le prix est le plus avantageux.

Pour l'élimination des projets défectueux, la note précitée renvoie à deux articles de la *Revue du génie*² et à l'ouvrage de M. Christophe, *Le Béton armé*.

La méthode de vérification exposée dans la *Revue du génie* est assez longue à employer; celle de M. Christophe est d'application immédiate dans le cas des poutres rectangulaires sans nervures, mais elle est assez compliquée dans le cas des poutres à nervures.

Le but de notre travail est de résumer brièvement la méthode de M. Christophe pour les poutres rectangulaires

1. Du 9 avril 1909.

2. Août 1899 et décembre 1900.

sans nervures ; nous montrerons ensuite que le cas des poutres à nervures peut se ramener aisément au cas précédent, sans que l'on ait besoin d'employer les formules compliquées établies par M. Christophe.

Méthode de M. Christophe.

2. La théorie de M. Christophe sur les poutres en béton armé peut être considérée comme une simplification de celle qui a été exposée dans ce recueil¹ et qui est due à M. Considère. Cette dernière théorie s'appuyait sur les hypothèses suivantes :

1° Une section plane perpendiculaire aux arêtes d'une poutre reste plane dans la flexion ;

2° Le travail du fer et du béton comprimé est proportionnel aux déformations ;

3° La partie du béton de la poutre soumise à des efforts de traction travaille à un taux uniforme de 12 kg par centimètre carré, quel que soit l'allongement subi (12 kg pour un béton dosé à 300 kg de ciment par mètre cube).

Les deux premières hypothèses ont été admises par M. Christophe, mais il remplace la troisième par la suivante :

« La résistance du béton à la traction est négligeable. »

Voici les principales considérations qui justifient ce remplacement.

a) Les expériences où M. Considère a puisé sa troisième hypothèse ont été faites sur des prismes de béton de très petites dimensions, confectionnés en vue de ces expériences mêmes. Les résultats obtenus devaient donc être des maxima bien rarement atteints dans la pratique.

b) M. Christophe a recherché quelle était la tension moyenne dans la partie tendue de trois poutres de béton armé du système Hennebique, nullement confectionnées

1. *Loc. cit.*

en vue de servir à des expériences. Il a trouvé qu'au moment où le fer et le béton comprimé atteignaient des tensions voisines de leur limite de résistance, la tension moyenne dans la partie tendue du béton était de $1,6 \text{ kg/cm}^2$ au lieu de 12 kg comme l'indiquait l'hypothèse qui nous occupe.

c) On sait que le béton éprouve, en séchant à l'air, un retrait quelquefois assez considérable; d'autre part, on a observé que les prismes en béton armé éprouvaient, en séchant dans les mêmes conditions, des retraits quatre ou cinq fois moins forts. On doit en conclure que le retrait du béton dans les pièces armées doit comprimer l'armature et imposer au béton un effort de traction. On ne peut guère songer à évaluer la valeur de cet effort; aussi, devant cette incertitude, ne peut-il guère être question de tenir compte de la résistance du béton à la traction.

d) M. Rabut¹, ingénieur des ponts et chaussées, a observé qu'une poutre prend une flèche permanente toutes les fois qu'on lui impose une charge supérieure à celles qu'elle a déjà portées. Ce fait tend à prouver qu'à chaque fatigue plus grande qu'on impose à la poutre, il se produit un changement dans l'état moléculaire de cette poutre; il y a probablement production de fissures dans la région tendue de la poutre, ainsi que M. Rabut affirme l'avoir constaté. Si donc le béton travaille à une certaine tension à un moment donné, il serait imprudent de compter sur cette tension, car elle peut diminuer si la poutre vient accidentellement à être soumise à une charge plus forte.

e) M. Considère² a repris les expériences à la suite desquelles il avait énoncé l'hypothèse qui nous occupe. Il a constaté qu'en soumettant une poutre à des efforts répétés, la tension du béton diminue et n'est bientôt plus que les 30 p. 100 de la tension primitive. Il est donc prudent de ne pas tenir compte de cette tension qui peut diminuer notablement avec le temps.

1. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 21 avril 1902.

2. *Ibid.*, 18 août 1902.

f) Disons enfin que les résultats obtenus en calculant une poutre, avec ou sans l'hypothèse de la résistance du béton à la traction, sont pratiquement identiques. La meilleure hypothèse sera donc celle qui conduira aux résultats les plus simples.

Formules pour la résistance au moment fléchissant.

3. Adoptons donc les trois hypothèses de M. Christophe et considérons la poutre représentée figure 1. Soient E_f et E_b les coefficients d'élasticité du fer et du béton (à la

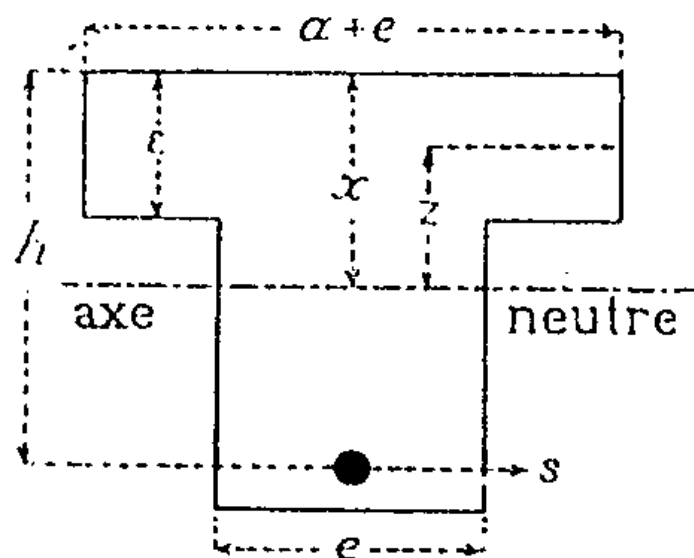


Fig. 1.

compression), C le travail du béton dans la fibre la plus comprimée, R la tension moyenne du métal, M le moment fléchissant, θ l'angle dont tourne une section de la poutre perpendiculaire à ses arêtes pendant la flexion.

Les trois hypothèses admises donnent :

$$x \operatorname{tg} \theta = \frac{C}{E_b},$$

$$(h - x) \operatorname{tg} \theta = \frac{R}{E_f},$$

$$\int_0^x cz \operatorname{tg} \theta dz + \int_{x-t}^x az \operatorname{tg} \theta dz = (h - x) \operatorname{tg} \theta \frac{E_f}{E_b} s,$$

$$M = R s (h - x) + e \frac{x^2 C}{3} + a \frac{x^2 C}{3} - (x - t)^3 \frac{C a}{3 x},$$

ou, en éliminant θ :

$$\left. \begin{aligned} cx^3 + 2x \left(s \frac{E_f}{E_b} + a\varepsilon \right) - a\varepsilon^2 - 2sh \frac{E_f}{E_b} &= 0, \\ \frac{R}{C} &= \frac{E_f}{E_b} \frac{h-x}{x}, \end{aligned} \right\} (1)$$

$$M = Rs(h-x) + \frac{C}{3} [cx^3 + ax^3 - a(x-\varepsilon)^3].$$

Telles sont les formules cherchées. Dans le cas où la poutre est rectangulaire, elles deviennent, en faisant $a=0$,

$$\left. \begin{aligned} cx^3 + 2xs \frac{E_f}{E_b} - 2sh \frac{E_f}{E_b} &= 0, \\ \frac{R}{C} &= \frac{E_f}{E_b} \frac{h-x}{x}, \end{aligned} \right\} (2)$$

$$M = Rs(h-x) + Ce \frac{x^3}{3}.$$

4. *Formules pratiques pour les poutres rectangulaires.* — L'usage du système (2) ci-dessus serait fastidieux ; nous allons montrer que, grâce à un tableau graphique, on peut trouver la résistance d'une poutre rectangulaire en béton armé sans avoir d'équations à considérer.

Supposons que, dans une poutre soumise à des charges croissantes, ce soit l'armature qui atteigne d'abord sa limite de résistance R' . Dans ces conditions, l'élimination de C , de x et de R dans le système (2) complété par l'égalité

$$R = R',$$

donne une équation de la forme

$$M = ch^2 f \left(\frac{s}{ch}, R', \frac{E_b}{E_f} \right).$$

Cette fonction f est assez compliquée, mais sa valeur en

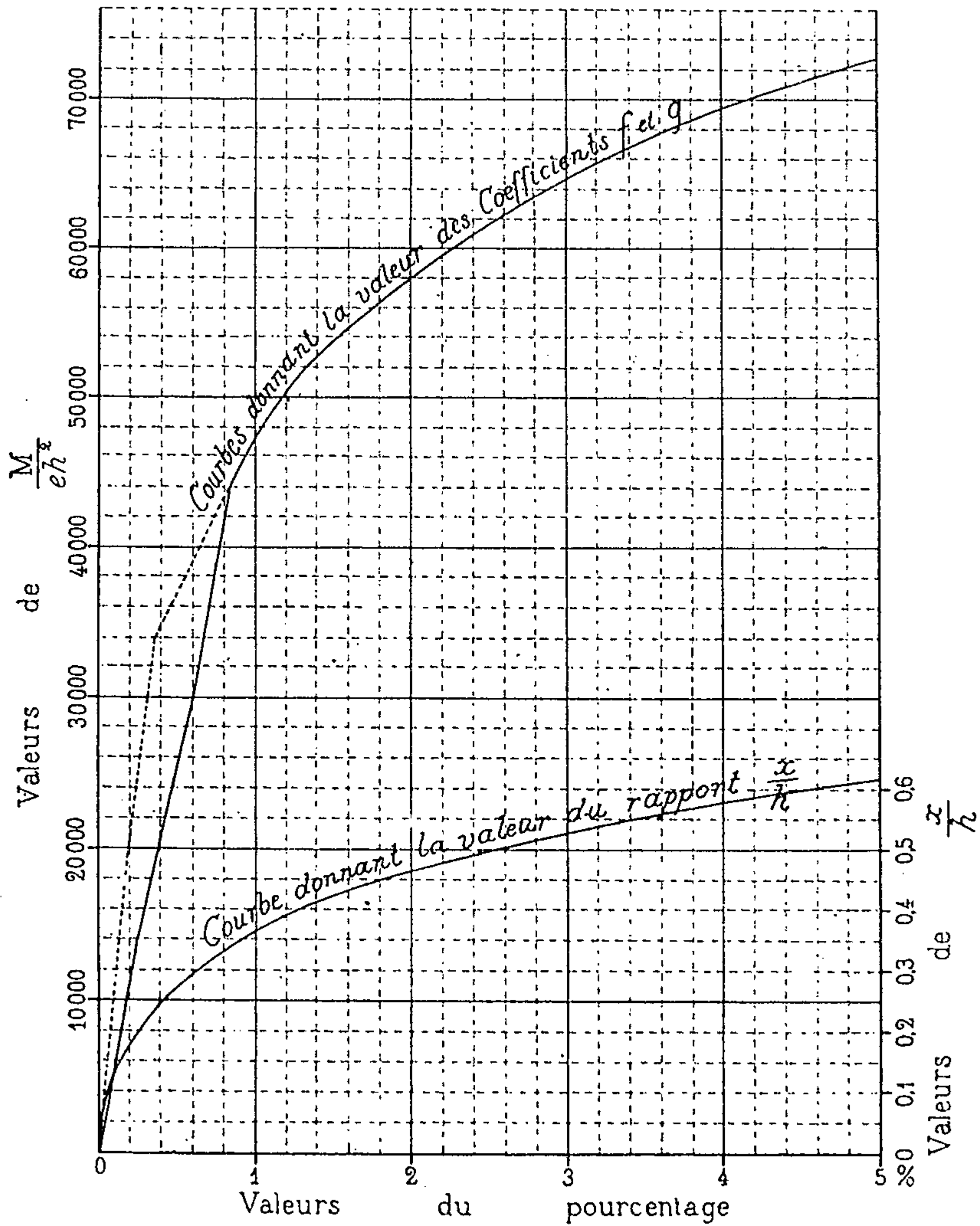


Fig. 2. — Tableau graphique pour le calcul des poutres en béton armé.

fonction du pourcentage $\frac{s}{eh}$ de la poutre est donnée par

le tableau (fig. 2) dressé sur les valeurs calculées par M. Christophe au moyen de formules équivalentes aux formules du système (2).

Si, au contraire, c'est le béton qui atteint d'abord sa limite de résistance C' , l'élimination de C , de x et de R dans le système (2) complété par l'égalité

$$C = C'$$

donnera une équation de la forme

$$M = e h^3 g \left(\frac{s}{e h}, C', \frac{E_b}{E_f} \right).$$

Le même tableau graphique donne aussi les valeurs de g , en fonction du pourcentage. On remarquera que l'intersection des courbes donnant f et g correspond à la poutre où le fer et le béton travaillent chacun à un taux proportionnel à leur limite de résistance.

En résumé, le moment résistant d'une poutre rectangulaire est égal à

$$e h^3 f,$$

f représentant un coefficient dont la valeur est donnée graphiquement, en fonction du pourcentage de la poutre.

Sur ce tableau, on a aussi tracé une courbe qui donne la valeur du rapport $\frac{x}{h}$, valeur qui ne dépend également que du pourcentage. Ce rapport détermine la position de la ligne neutre.

5. a) *Formules pratiques pour les poutres à nervures.* — Cherchons d'abord la position de l'axe neutre d'une poutre à nervures.

Soit x une valeur approchée de la distance de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée de la poutre. Rem-

plaçons la surface $a\varepsilon$ de la poutre (surface hachurée sur la figure 3) par une surface de hauteur h et de largeur

$$\zeta = a \frac{\varepsilon (2x_1 - \varepsilon)}{x_1^2}.$$

Nous obtenons une nouvelle poutre ayant même hauteur et même armature que la poutre proposée et une largeur égale à

$$e + \zeta.$$

Le tableau graphique donne pour cette poutre rectangulaire une certaine valeur x_2 , comme distance de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée.

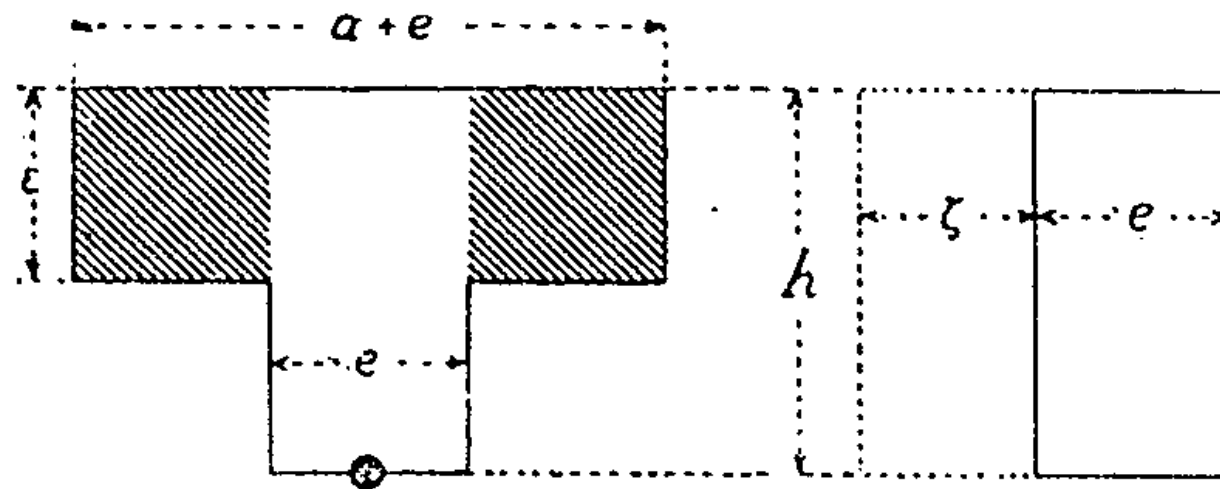


Fig. 3.

Recommençons avec x_2 la même opération qu'avec x_1 et ainsi de suite, nous obtenons une suite de quantités $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$. Ces quantités tendent vers une limite X qui est la distance cherchée de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée de la poutre.

Ce résultat sera démontré rigoureusement plus loin.

(Note A.) Pratiquement, pour avoir X , une ou deux opérations suffisent.

b) Cherchons maintenant le moment fléchissant M que peut supporter une poutre à nervures (fig. 4).

Remplaçons la poutre proposée A (fig. 1) par les deux poutres rectangulaires B et C ayant les dimensions que nous avons indiquées et ayant leur axe neutre à la même distance au-dessus du bas de la poutre.

Notre tableau graphique donne le moment résistant de

chacune de ces deux dernières poutres, puisque nous avons leurs dimensions, que nous connaissons pour chacune d'elles la valeur du rapport $\frac{x}{h}$ et que ce sont des poutres rectangulaires sans nervures. Soient M_1 et M_2 ces deux moments résistants.

Le moment résistant de la poutre proposée sera

$$M = M_1 - M_2$$

si, dans la poutre B, c'est le fer qui atteint d'abord sa limite de résistance R' .

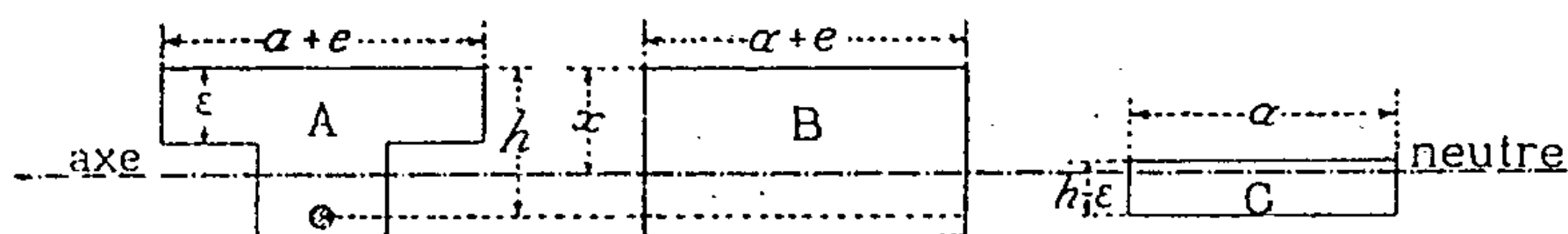


Fig. 4¹.

Dans le cas contraire, on aura

$$M = M_1 - M_2 \chi,$$

χ étant la plus grande des deux expressions

$$\frac{x - r}{x} \quad \text{et} \quad \frac{h - x}{x} \frac{E_f C'}{E_b R'}$$

Ce résultat sera démontré rigoureusement plus loin (noté B).

En résumé, par les opérations indiquées ci-dessus on aura les moments résistants d'une poutre en T, sans avoir d'équation du second degré à résoudre.

6. *Moment d'inertie.* — Cherchons pour les poutres rectangulaires en béton armé l'analogie de ce qu'on appelle moment d'inertie dans les poutres homogènes.

1. Par suite d'une erreur de dessin, la poutre C a été indiquée trop longue.

Si l'on supposait que le béton ait même coefficient d'élasticité à la traction qu'à la compression, la théorie que nous avons exposée reviendrait à supprimer dans la poutre le béton au-dessous de l'axe neutre et à remplacer la section s de l'armature par une section s' de béton telle que

$$s' = s \frac{E_f}{E_b}$$

On obtiendrait ainsi une poutre homogène dont le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre serait

$$I = \int_0^x c x^2 dx + (h - x)^2 s \frac{E_f}{E_b} = c \frac{x^3}{3} + (h - x)^2 s \frac{E_f}{E_b}$$

Considérons maintenant deux cas :

a) Dans la poutre proposée, supposée soumise à des charges croissantes, c'est le métal qui atteint d'abord sa limite de résistance. Dans cette hypothèse, on a

$$M = R' s (h - x) + C e \frac{x^3}{3},$$

$$C = R' \frac{E_b}{E_f} \frac{x}{h - x},$$

d'où

$$M = \frac{R'}{h - x} \frac{E_b}{E_f} \left[s (h - x)^2 \frac{E_f}{E_b} + e \frac{x^3}{3} \right] = \frac{R'}{h - x} \frac{E_b}{E_f} I.$$

Mais, f étant le nombre déduit du tableau graphique, on a

$$M = c h^2 f,$$

d'où

$$I = c h^2 f \frac{E_f}{E_b} \frac{h - x}{R'}.$$

b) Dans l'autre cas, on obtiendrait d'une façon analogue

$$I = c h^2 g \frac{x}{C'}.$$

Formules pour la résistance d'une poutre au glissement longitudinal.

7. Nous ne traiterons que le cas d'une poutre rectangulaire. Si on a une poutre à nervures, on supposera, pour la résistance au glissement longitudinal, que la poutre se réduit à son âme.

La valeur de l'effort de glissement total dans une section est donnée par la formule bien connue

$$G = \frac{M}{I} \int_{v_0}^v \omega v.$$

Appliquons cette formule à une poutre rectangulaire en béton, après avoir remplacé l'armature s' par une section de béton égale à $s \frac{E_f}{E_b}$.

On voit de suite que G est maximum dans la section longitudinale qui contient l'axe neutre. Pour cette section, G a pour valeur

$$g_1 = \frac{M}{I} e \frac{x^2}{2},$$

en prenant l'intégrale pour la partie supérieure de la poutre, et

$$g_2 = \frac{M}{I} \frac{E_f}{E_b} (h - x) s,$$

en prenant l'intégrale pour la partie inférieure de la poutre¹.

On en déduit

$$g_1 - g_2 = \frac{M}{I} \left[e \frac{x^2}{2} - \frac{E_f}{E_b} (h - x) s \right],$$

1. M. Christophe indique qu'au-dessous de l'axe neutre G est constant et devient tout d'un coup nul à hauteur de l'armature. Sous la forme g_2 que nous donnons à G au-dessous de l'axe neutre, on voit au contraire que G diminue constamment au-dessous de cet axe et devient nul à l'armature.

ou, en tenant compte de la valeur de x ,

$$g_1 - g_2 = 0.$$

On s'oppose aux efforts de glissement au moyen de barres verticales. Soient σ la section des barres employées, ρ et γ la résistance du métal et du béton au cisaillement, d la distance entre deux barres verticales placées en des points où le moment fléchissant a pour valeur M_1 et M_2 . Pour que la poutre résiste au glissement longitudinal, on devra avoir

$$(M_1 - M_2) e \frac{x^2}{2I} \leq \rho \sigma + ed\gamma.$$

Résistance à l'effort tranchant.

8. Dans une poutre homogène, la valeur de l'effort tranchant local est égale à celle de l'effort local de glissement. Si la poutre résiste à l'un de ces efforts, elle résistera à l'autre.

Dans une poutre hétérogène, on s'oppose à l'effort tranchant et au glissement longitudinal par des moyens différents. Pour le second de ces efforts, on dispose des barres verticales. Pour le premier de ces efforts, nous admettrons que, si Ω est la section du béton et si A est la valeur de l'effort tranchant total dans cette section, on doit avoir

$$A \leq s\rho + \Omega\gamma.$$

Si la section s était insuffisante dans certaines sections, il faudrait ajouter des barres horizontales, de section s' telle que

$$A = (s + s')\rho + \Omega\gamma.$$

Formules pour la résistance à la compression.

9. a) *Pièce de faible hauteur.* — Si l'on charge progressivement une telle pièce, c'est dans le béton que se pro-

duira d'abord une tension dangereuse. Si la poutre porte un poids P , on aura

$$P = C\Omega + sR,$$

où Ω est la section du béton, s la section du fer.

En écrivant que le fer et le béton subissent des allongements égaux, on aura

$$\frac{C}{R} = \frac{E_b}{E_f};$$

donc le poids P que peut supporter une poutre est

$$P = C' \left(\Omega + s \frac{E_f}{E_b} \right).$$

b) *Pièce longue.* — Le flambage est alors à craindre et la valeur de C' doit en conséquence être multipliée par un certain coefficient. Par analogie avec ce qui se passe dans une poutre homogène, on peut prendre pour ce coefficient celui de la formule de Rankine, savoir

$$1 + \alpha l^2 \frac{\Omega}{I}.$$

Le poids que peut porter une pièce longue est donc

$$P = C' \left(\Omega + s \frac{E_f}{E_b} \right) \frac{1}{1 + \alpha l^2 \frac{\Omega}{I}}.$$

Il y a lieu de remarquer que, pour le calcul de I , il faut prendre non la section totale du fer, mais seulement la partie de cette section qui se trouve dans une des semelles de la poutre, du côté opposé où la flexion a le plus de chance de se produire.

Tableau graphique.

10. Avec le dosage de 300 kg de ciment par mètre cube de béton, on peut prendre

$$\begin{array}{l}
 C' = 300\ 000 \\
 R' = \text{pour le fer } 6\ 000\ 000, \text{ pour l'acier } 9\ 000\ 000 \\
 \rho = \quad \quad \quad 4\ 800\ 000, \quad \quad \quad 7\ 200\ 000 \\
 \gamma = 20\ 000, \quad \quad \frac{E_b}{E_f} = \frac{1}{10}, \quad \quad \alpha = 0,000\ 025.
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} C' \\ R' \\ \rho \\ \gamma \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Unités :} \\ \text{mètre} \\ \text{et kilogr.} \end{array}$$

Les constructeurs imposent généralement à la matière des efforts de 20 à 30 p. 100 plus élevés que ceux que nous avons adoptés dans notre tableau graphique.

Le tableau graphique donne les valeurs des coefficients f et g au moyen d'une courbe en trait continu pour le fer, discontinu pour l'acier. Les deux courbes se confondent pour les forts pourcentages.

Enfin, une courbe en trait plein donne la valeur du rapport $\frac{x}{h}$.

Exemples de calcul.

11. a) Soit la poutre E (fig. 5) dont nous supposons l'armature en fer.

Le pourcentage est

$$\frac{\pi (0,02)^2}{4 \times 0,10 \times 0,18} = 0,0174.$$

Le tableau graphique donne

$$g = 5\ 600,$$

d'où l'on conclut

$$M = e h^2 g = 181,4 \text{ kgm.}$$

b) Soit la poutre F (fig. 6) dont nous supposons l'armature en acier.

Cherchons x . Partons de $x = 0,10$.

$$e + \zeta = 0,20 + 1,00 \frac{(0,1)^2 - (0,05)^2}{(0,1)^2} = 0,95.$$

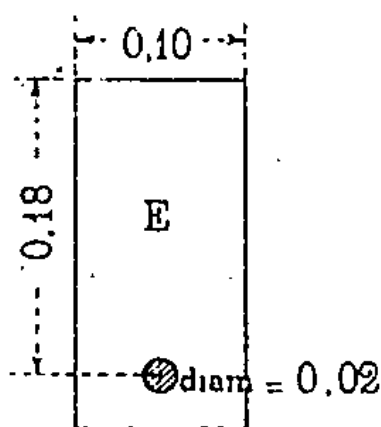


Fig. 5.

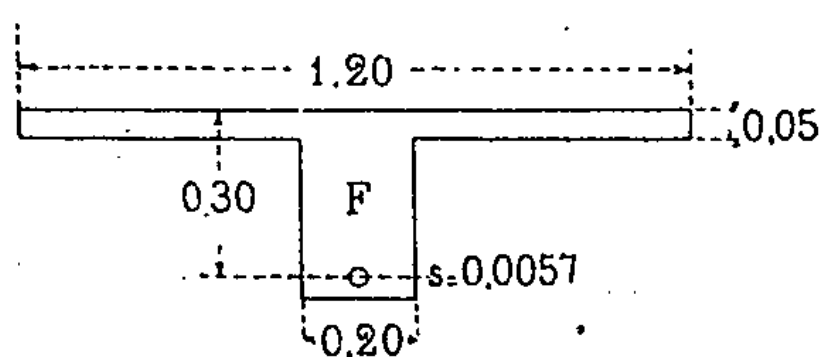


Fig. 6.

Le pourcentage de la nouvelle poutre est

$$\frac{0,0057}{0,8 \times 0,95} = 0,021,$$

d'où, par le tableau graphique,

$$x_2 = 0,14,$$

$$e + \zeta = 0,20 + 1,00 \frac{(0,14)^2 - (0,09)^2}{(0,14)^2} = 0,79,$$

$$x_3 = 0,145.$$

En continuant, on trouverait encore

$$x_4 = 0,145.$$

On prendra donc

$$x = 0,145.$$

Considérons alors la poutre G (fig. 7) et cherchons son moment résistant M_1 . On a

$$\frac{x}{h} = \frac{0,145}{0,30} = 0,47,$$

le pourcentage de cette poutre est donc (par le tableau graphique) 2,1 p. 100; de même

$$g = 59\ 100 ;$$

donc

$$M_1 = eh^2 g = 1,20 \times (0,3)^2 \times 59\ 100 = 6\ 383 \text{ kgm.}$$

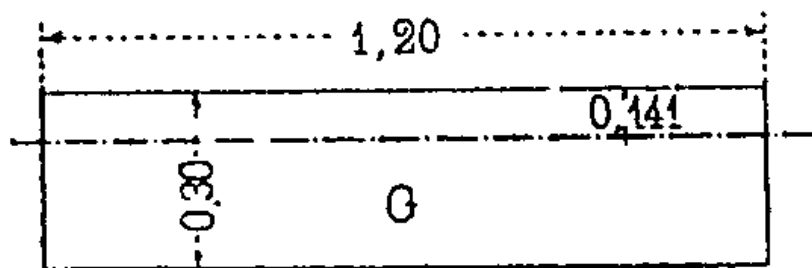


Fig. 7.

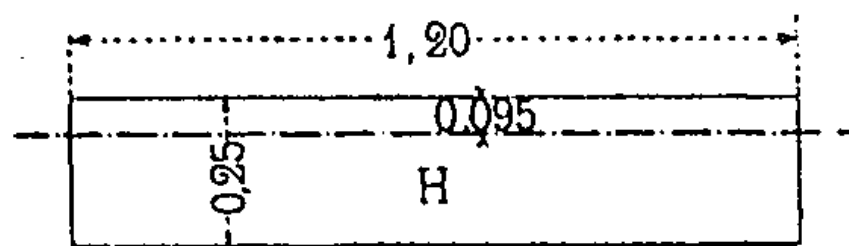


Fig. 8.

Considérons alors maintenant la poutre H (fig. 8) et cherchons son moment résistant M_2 . On a

$$\frac{x}{h} = \frac{0,095}{0,25} = 0,364,$$

le pourcentage est 1,1 p. 100 et

$$g = 46\ 500 ;$$

$$M_2 = eh^2 g = 1,20 \times (0,25)^2 \times 46\ 500 = 4\ 324 \text{ kgm.}$$

On en conclut

$$M = M_1 - M_2 \frac{x - \epsilon}{x} = 4\ 178 \text{ kgm.}$$

Une armature en fer au lieu d'une armature en acier n'aurait pas donné un résultat plus fort.

M. TRICAUD,
Capitaine du génie.

NOTE A

12. Nous allons démontrer que les quantités que nous appelons $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ tendent vers une limite et que cette limite est bien la distance de l'axe neutre de la poutre à la fibre la plus comprimée.

x_2 , qui détermine la position de l'axe neutre d'une poutre de hauteur h , de largeur $c + a\varepsilon \frac{2x_1 - \varepsilon}{x_1^2}$ et d'armature s , est donné par le tableau graphique; mais c'est en même temps la racine positive de l'équation

$$x_2^2 \left(c + a\varepsilon \frac{2x_1 - \varepsilon}{x_1^2} \right) + 2x_2 s \frac{E_f}{E_b} - 2sh \frac{E_f}{E_b} = 0; \quad (3)$$

$x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ sont racines d'équations analogues.

Supposons pour fixer les idées $x_1 < x$.

Comparons x_2 à x , et pour cela substituons x_1 à x_2 dans le premier membre de l'équation (3) : on obtient

$$y = x_1^2 c + x_1 \left(2s \frac{E_f}{E_b} + 2a\varepsilon \right) - 2sh \frac{E_f}{E_b} - a\varepsilon^2.$$

Puisque

$$x_1 < x,$$

y , d'après les propriétés du trinôme du second degré, est < 0 et l'on a

$$x_2 > x_1.$$

Comparons maintenant x_2 à x et pour cela substituons

x à x_2 dans le premier membre de l'équation (3) : on obtient

$$y = x^2 \left(c + a \frac{2x_1 - \varepsilon}{x_1^2} \varepsilon \right) + 2xs \frac{E_f}{E_b} - 2sh \frac{E_f}{E_b};$$

mais on a

$$x^2 c + x \left(2s \frac{E_f}{E_b} + 2a\varepsilon \right) - 2sh \frac{E_f}{E_b} - a\varepsilon^2 = 0,$$

d'où

$$y = x^2 a \varepsilon \frac{2x_1 - \varepsilon}{x_1^2} - 2xa\varepsilon + a\varepsilon^2,$$

expression qui est du signe de

$$y_1 = x^2 a \varepsilon (2x_1 - \varepsilon) - 2xx_1^2 a \varepsilon + a\varepsilon^2 x_1^2,$$

ou de

$$y_2 = 2xx_1 (x - x_1) - \varepsilon (x^2 - x_1^2) = (x - x_1) [2xx_1 - \varepsilon (x + x_1)]$$

ou de

$$y_3 = 2xx_1 - \varepsilon (x + x_1).$$

Or, y_3 est certainement > 0 , car nous pouvons faire l'hypothèse

$$x > \varepsilon.$$

Si en effet on avait

$$x \leq \varepsilon,$$

la poutre considérée aurait même résistance que la poutre rectangulaire sans nervures ayant même hauteur, même largeur totale et même armature. (Nous écarterons ce cas puisque nous traitons le cas des poutres à nervure.)

y , résultat de la substitution de x à x_2 , étant positif, on en conclut

$$x_2 < x.$$

Ainsi x_2 est compris entre x_1 et x . Les quantités x_1, x_2, \dots, x_n sont donc des quantités positives toujours croissantes et inférieures à x : elles ont donc une limite X .

Démontrons que $X = x$. En effet on a

$$X^2 \left(c + a \frac{2X - \varepsilon}{X^2} \right) + 2Xs \frac{E_b}{E_f} = 0,$$

ou

$$cX^2 + X \left(2s \frac{E_b}{E_f} + 2a\varepsilon \right) - 2sh \frac{E_b}{E_f} - a\varepsilon^2 = 0.$$

C'est l'équation qui donne x .

Donc

$$X = x.$$

NOTE B

13. Nous allons justifier la méthode indiquée pour calculer le moment résistant d'une poutre à nervure.

1^{er} cas. — Supposons d'abord que dans les trois poutres représentées figure 2 et soumises à des forces croissantes, ce soit l'armature qui atteigne d'abord sa limite de résistance R' .

Supposons que ces trois poutres soient chargées de telle façon que leur moment fléchissant soit pour chacune d'elles égal à leur moment résistant M , M_1 et M_2 . Dans ces conditions, il devient évident que si l'on partage verticalement en deux parties égales la troisième poutre C et si l'on place les morceaux contre la première poutre A, on reproduira exactement la troisième poutre B comme dimension et comme tension à chaque point correspondant

On aura donc

$$M + M_2 = M_1,$$

ou

$$M = M_1 - M_2.$$

2^e cas. — Supposons que dans les trois poutres représentées plus haut et soumises à des charges croissantes, ce soit le béton qui atteigne d'abord sa limite de résistance C' .

Le travail du métal dans les deux premières poutres est, au moment où la compression C' se produit,

$$R_1 = C' \frac{h - x}{x} \frac{E_f}{E_b}.$$

Dans les mêmes conditions, le travail de l'armature dans la troisième poutre est

$$R_2 = C' \frac{h - x}{x - \varepsilon} \frac{E_f}{E_b}$$

Supposons que les deux premières poutres soient chargées comme au cas précédent et la troisième de façon que son moment fléchissant soit

$$M'_2 = M_2 \frac{R_1}{R_2}$$

Dans ces conditions, il devient évident que si l'on partage verticalement en deux parties égales la troisième poutre C et si l'on place les morceaux contre la poutre A, on reproduira exactement la deuxième poutre B comme dimension et comme tension en chaque point correspondant. On aura donc

$$M + M_2 \frac{R_1}{R_2} = M_2$$

ou

$$M = M_2 - M_2 \frac{x - \varepsilon}{x}$$

3^e cas. — Supposons que dans les deux premières poutres représentées ci-dessus et soumises à des charges croissantes, ce soit le béton qui atteigne d'abord sa limite de résistance C' et qu'au contraire ce soit l'armature pour la troisième.

Un raisonnement analogue aux deux précédents donnerait

$$M + M_2 \frac{R_1}{R_2} = M_1$$

ou

$$M = M_1 - M_2 \frac{C' h - x E_f}{R' x E_b}$$

La méthode se trouve donc justifiée.

Remarques. — On remarquera que l'on a dans le deuxième cas

$$\frac{x - \varepsilon}{x} > \frac{h - x}{x} \frac{C' E_f}{R' E_b},$$

et dans le second

$$\frac{x - \varepsilon}{x} < \frac{h - x}{x} \frac{C' E_f}{R' E_b}.$$

La distinction des premier, deuxième et troisième cas se fait de suite en formant pour chacune de ces poutres la valeur du rapport $\frac{x}{h}$ et en considérant le tableau graphique.

M. T.